МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра МИС и ПО

Методические указания к выполнению РГР по теме:

"Дифференциальные уравнения"

по дисциплине **"Математика "** для специальности **21.03.01 Нефтегазовое дело**
для студентов очной формы обучения

Мурманск
2019 г.

Оглавление

Введение.

Методические указания к выполнению РГР содержат задания на выполнение РГР№4 **"Дифференциальные уравнения"** по дисциплине **"Математика "**, а также решение примерного варианта РГР.

Расчетно-графическая работа по дисциплине выполняется в соответствии с учебным планом по специальности.

Целью РГР являются систематизация, расширение и углубление знаний, полученных при теоретическом изучении дисциплины, с тем, чтобы студент мог использовать полученные знания на практике.

Приступая к выполнению расчетно-графической работы, необходимо ознакомиться с соответствующими разделами программы курса и методическими указаниями.

РГР должна быть выполнено и представлено в срок, установленный кафедрой.

При выполнении задания студенту необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. В работе должен быть указан номер варианта работы.
2. Вариант каждой задачи выбирается по последней цифре номера зачетной книжки студента. Самовольная замена одного варианта задания другим не разрешается.
3. Перед решением задания должно быть приведено его условие. Отделите решение задачи от ее условия некоторым интервалом.
4. Решение задания следует сопровождать развернутыми расчетами.
5. Выполненная работа должна быть оформлена в соответствии с требованиями по оформлению письменных работ.
6. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты, а также выполнить все рекомендации.
7. Студенты, не получившие зачета по предусмотренным учебным планом письменным работам, к экзамену не допускаются.
8. Работы, выполненные не по своему варианту, рецензированию не подлежат.

Задания для выполнения
РГР №4 "Дифференциальные уравнения"

Задача 1. Дано дифференциальное уравнение 1-го порядка и точка *M*. Определить тип дифференциального уравнения. Найти общее решение дифференциального уравнения, уравнение интегральной кривой, проходящей через точку *M* и уравнения еще 4-х интегральных кривых (любых). Построить все эти кривые в системе координат.

№ варианта	Дифференциальное уравнение	Точка
1	$xy' + y = 0$	$M(-2;\,4)$
2	$y'(x^2 - 4) = 2xy$	$M(0;\,3)$
3	$\sin^2 x \cdot y' = 1$	$M\left(\frac{\pi}{4};\,-1\right)$
4	$y' = \sqrt{1 - y^2}$	$M(0;\,1)$
5	$2\sqrt{x} \cdot y' = 1$	$M(1;\,2)$
6	$\mathrm{tg}x \cdot y' - y = 0$	$M\left(-\frac{\pi}{2};\,2\right)$
7	$y' \cdot \sqrt{1 - x^2} + x = 0$	$M(0;\,-1)$
8	$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$	$M(0;\,1)$
9	$y' - 2(x - 1) = 0$	$M(2;\,1)$
10	$xy' = 3y$	$M(-1;\,2)$

Задача 2. Дано дифференциальное уравнение 1-го порядка. Определить тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

№ варианта	Дифференциальное уравнение	№ варианта	Дифференциальное уравнение
1	$y' = 2y + \sqrt{y} \cdot e^x$	6	$xyy' = y^2 - x\sqrt{x^2 - y^2}$
2	$y' = \frac{y}{x} - \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$	7	$y' + 2y\,\mathrm{tg}x = \sin x$
3	$y' = \frac{y}{x} + \ln^2 x$	8	$xy' - y = \sqrt{2x^2 + 2xy + y^2}$

4	$x^2dy = (xy + 4x^2 + y^2)dx$	9	$(1+x^2)y' + 2xy = 3x^2$
5	$y' + \dfrac{y}{x} = x^2y^2\sqrt{4-x^2}$	10	$xy' - y = xe^{-\frac{y}{x}}$

Задача 3. Дано дифференциальное уравнение 2-го порядка и начальные условия. Определить тип дифференциального уравнения и найти его частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

№ варианта	Дифференциальное уравнение	Начальные условия
1	$(1+y^2)y'' = 2y(y')^2$	$y(0)=1,\ \ y'(0)=2$
2	$(y''+5x)x+3y'=0$	$y(1)=0,\ \ y'(1)=-1$
3	$xy''+y'-2x=0$	$y(1)=2,\ \ y'(1)=0$
4	$xy''-y'-x\sqrt{xy'}=0$	$y(2)=1,\ \ y'(2)=\dfrac{1}{2}$
5	$(1-y)y''+2(y')^2=0$	$y(0)=0,\ \ y'(0)=1$
6	$x^2y''=\ln x - xy'$	$y(1)=2,\ \ y'(1)=1$
7	$xy''-2y'+8x=0$	$y(1)=2,\ \ y'(1)=-1$
8	$y''+y'\cdot \mathrm{tg}x=\cos^2 x$	$y(0)=0{,}5,\ \ y'(0)=0$
9	$y''+2(y')^2\cdot \mathrm{tg}y=0$	$y(0)=0,\ \ y'(0)=1$
10	$x^2y''+2xy'=1$	$y(1)=1,\ \ y'(1)=2$

Задача 4. Дано дифференциальное уравнение 2-го порядка. Определить тип дифференциального уравнения и найти его общее решение, используя метод вариации произвольных постоянных.

№ варианта	Дифференциальное уравнение	№ варианта	Дифференциальное уравнение
1	$y''+y=\sin^2 x$	6	$y''+4y'+5y=\dfrac{1}{e^{2x}\sin x}$

2	$y''-y'=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{x}}$	7	$y''+2y'=\dfrac{2}{1+e^{2x}}$
3	$y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x^2-10x}$	8	$y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{4-x^2}}$
4	$y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$	9	$y''-2y'=\operatorname{ch}2x$
5	$y''-4y'+4y=\dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$	10	$y''-8y'+16y=\dfrac{e^{4x}}{(x+1)}$

Задача 5. Дано дифференциальное уравнение 2-го порядка. Определить тип дифференциального уравнения и найти его общее решение, используя метод неопределенных коэффициентов.

№ варианта	Дифференциальное уравнение	№ варианта	Дифференциальное уравнение
1	$y''-2y'+y=e^{-x}(4x^2+2)$	6	$y''+y'=xe^{-x}$
2	$y''+4y=3\sin x+5\cos x$	7	$y''+y=x^2e^{x}$
3	$y''+y'-2y=3e^{x}$	8	$y''+2y'+5y=17\cos 2x$
4	$y''+6y'+9y=6\sin 3x$	9	$y''+4y'+4y=e^{x}(3x+2)$
5	$y''+9y=e^{x}(10x-1)$	10	$y''-y'=x^2$

Задача 6. Дана система линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Найти общее решение системы методом повышения порядка.

№ варианта	Система дифференциальных уравнений	№ варианта	Система дифференциальных уравнений
1	$\begin{cases} y'=z+\cos x, \\ z'=2y+z+5\sin x. \end{cases}$	6	$\begin{cases} y'=-y+2z+2\sin x, \\ z'=-2y-5z-\cos x. \end{cases}$
2	$\begin{cases} y'=-3y-z+3e^{2x}, \\ z'=y-z+e^{2x}. \end{cases}$	7	$\begin{cases} y'=2y+z+x-1, \\ z'=y+2z+3x^2. \end{cases}$

3	$\begin{cases} y' = y + z + x^2 - x, \\ z' = -2y - z + 2x. \end{cases}$	8	$\begin{cases} y' = y - z + 2x, \\ z' = -3y - z + 4x^2. \end{cases}$
4	$\begin{cases} y' = 3y + 2z - e^{5x}, \\ z' = y + 2z + 2e^{5x}. \end{cases}$	9	$\begin{cases} y' = 2y - 3z + 3\cos 2x, \\ z' = y - 2z - \sin 2x. \end{cases}$
5	$\begin{cases} y' = -y + z + 6x^2, \\ z' = y - z - 2x. \end{cases}$	10	$\begin{cases} y' = -7y + z + e^x, \\ z' = -2y - 5z - e^x. \end{cases}$

Решение примерного варианта РГР №4

Задача 1. Дано дифференциальное уравнение 1-го порядка: $\operatorname{ctg} x \cdot y' + y = 0$ и точка $M\left(\frac{\pi}{3}; 1\right)$. Определить тип дифференциального уравнения. Найти общее решение дифференциального уравнения, уравнение интегральной кривой, проходящей через точку M и уравнения еще 4-х интегральных кривых (любых). Построить все эти кривые в системе координат.

Задача 2. Дано дифференциальное уравнение 1-го порядка: $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}.$ Определить тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

Задача 3. Дано дифференциальное уравнение 2-го порядка: $2(y')^2 - (y-1)y'' = 0$ и начальные условия: $y(1) = 3, \quad y'(1) = 2.$ Определить тип дифференциального уравнения и найти его частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Задача 4. Дано дифференциальное уравнение 2-го порядка: $y'' - 10y' + 25y = \frac{e^{5x}}{x^3}$. Определить тип дифференциального уравнения и найти его общее решение, используя метод вариации произвольных постоянных.

Задача 5. Дано дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$y'' + 3y' - 4y = e^{-x}(\cos 3x + 8\sin 3x)$. Определить тип дифференциального уравнения и найти его общее решение, используя метод неопределенных коэффициентов.

Задача 6. Дана система линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка: $\begin{cases} y' = y + 5z + x, \\ z' = -y - 3z + 1 - x. \end{cases}$ Найти общее решение системы методом повышения порядка.

Решение задачи 1. Данное дифференциальное уравнение $\mathrm{ctg}x \cdot y' + y = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными. Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$ и разделим переменные, умножая обе части уравнения на $\frac{\mathrm{tg}x\, dx}{y}$:

$$\mathrm{ctg}x \frac{dy}{dx} = -y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\mathrm{tg}x\, dx.$$

Интегрируя полученное равенство, получим:

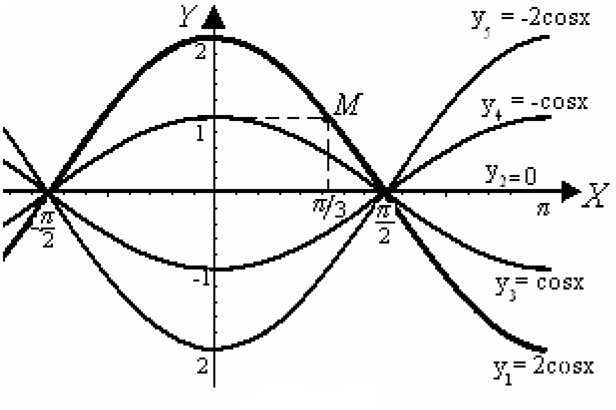
$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx + C \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} dx + C \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C_1|,$$

откуда $\ln|y| = \ln|C_1 \cdot \cos x| \quad \Rightarrow \quad y = \pm C_1 \cos x$. Заменяя $\pm C_1 = C$, запишем общее решение данного уравнения: $y = C\cos x$.

Найдем уравнение интегральной кривой, проходящей через точку $M\left(\frac{\pi}{3};1\right)$, т.е. частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию: $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$. Для этого подставим в общее решение вместо *x*, *y* числа $\frac{\pi}{3}$, 1 соответственно: $1 = C\cos\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{2}C \quad \Rightarrow \quad C = 2$. Подставляя найденное значение C в общее решение, получим искомое частное решение (уравнение интегральной кривой, проходящей через точку *M*): $y_1 = 2\cos x$.

Найдем уравнения еще нескольких интегральных кривых.

$$C = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 0; \qquad C = 1 \quad \Rightarrow \quad y_3 = \cos x;$$
$$C = -1 \quad \Rightarrow \quad y_4 = -\cos x; \qquad C = -2 \quad \Rightarrow \quad y_5 = -2\cos x.$$



Построим все эти кривые в системе координат .
Ответы: $y = C\cos x$; $y_1 = 2\cos x,\ y_2 = 0,$
$y_3 = \cos x,\ y_4 = -\cos x,$
$y_5 = -2\cos x.$

Решение задачи 2. Данное дифференциальное уравнение $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}$ – это уравнение Бернулли (см. (27)), в котором $n = \frac{1}{2}$. Применим подстановку $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставив значения y и y' в уравнение, получим $u'v + uv' - \frac{4}{x}uv = x\sqrt{uv}$, или

$$u'v + u\left(v' - \frac{4}{x}v\right) = x\sqrt{uv} \qquad (*)$$

Найдем функцию $v(x)$, решая уравнение $v' - \frac{4}{x}v = 0$:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{4}{x}v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{4}{x}v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{4}{x}dx .$$

Проинтегрируем левую и правую части этого уравнения:

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{4}{x}dx + C \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = 4\ln|x| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln\left|Cx^4\right| \quad \Rightarrow \quad v = \pm Cx^4.$$

при соответствующем подборе $\pm C = 1$ получаем $v(x) = x^4$ – частное решение уравнения $v' - \frac{4}{x}v = 0$.

Подставляя найденную функцию $v(x) = x^4$ $v(x, C_0) = x^4$ в (*), получим дифференциальное уравнение для функции u: $u'x^4 = x\sqrt{ux^4}$, или $u'x = \sqrt{u}$.

Найдем функцию $u(x, C)$ – общее решение этого уравнения:

$$\frac{du}{dx}x = \sqrt{u} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{du}{\sqrt{u}} = \int\frac{dx}{x} + C \Rightarrow 2\sqrt{u} = \ln|x| + C \Rightarrow u(x,C) = \left(\frac{\ln|x|+C}{2}\right)^2$$

Общим решением исходного уравнения является функция

$$y = v(x)\cdot u(x, C) = x^4\left(\frac{\ln|x|+C}{2}\right)^2 .$$

Ответ: $y = x^4\left(\frac{\ln|x|+C}{2}\right)^2$.

Решение задачи 3. Данное дифференциальное уравнение $2(y')^2 - (y-1)y'' = 0$ – это дифференциальные уравнения 2-го порядка, не содержащие независимой переменной x . Полагаем $y' = p(y)$, тогда $y'' = p'_y p$ и уравнение примет вид:

$$2p^2 - (y-1)pp'_y = 0 \Leftrightarrow p\big(2p - (y-1)p'_y\big) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = 0, \\ 2p - (y-1)p'_y = 0. \end{array}\right.$$

Решая первое уравнение, получим: $p = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ – первое семейство решений. Оно не удовлетворяет начальному условию $y'(1) = 2$.

Второе уравнение $2p - (y-1)p'_y = 0$ есть уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные, заменяя p'_y на $\frac{dp}{dy}$ и проинтегрируем:

$$2p = (y-1)\frac{dp}{dy} \Rightarrow \frac{dp}{p} = 2\frac{dy}{y-1} \Rightarrow \int\frac{dp}{p} = 2\int\frac{dy}{y-1} + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|p| = 2\ln|y-1| + \ln|C| \Rightarrow \ln|p| = \ln\left|C(y-1)^2\right| \Rightarrow p = C_1(y-1)^2,$$

где $C_1 = \pm C$. Производя обратную замену $p = y'$, получим дифференциальное уравнение 1-го порядка относительно неизвестной функции y:

$$y' = C_1(y-1)^2.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Прежде чем его интегрировать, целесообразно определить значение постоянной C_1, используя начальные условия ($y = 3$, $y' = 2$ при $x = 1$): $2 = C_1(3-1)^2 \Rightarrow 2 = 4C_1 \Rightarrow C_1 = 1/2$.

Подставив значение $C_1 = 1/2$ в дифференциальное уравнение, получим:

$$y' = \frac{1}{2}(y-1)^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(y-1)^2 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{(y-1)^2} = \frac{1}{2}dx \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{(y-1)^2} = \frac{1}{2}\int dx + C_2 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{y-1} = \frac{x}{2} + C_2.$$

Здесь использовано: $\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int \frac{d(y-1)}{(y-1)^2} = \frac{(y-1)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{y-1} + C$.

Определим значение постоянной C_2, соответствующее начальному условию $y(1) = 3$: $-\frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = -1.$

Отсюда получим частный интеграл, удовлетворяющий заданным начальным условиям (решение задачи Коши): $-\frac{1}{y-1} = \frac{x}{2} - 1.$

Получим частное решение уравнения, выразив $y(x)$:

$$\frac{1}{y-1} = 1 - \frac{x}{2} = \frac{2-x}{2} \;\Rightarrow\; y-1 = \frac{2}{2-x} \;\Rightarrow\; y = 1 + \frac{2}{2-x} = \frac{x-4}{x-2}.$$

Ответ: $y = \frac{x-4}{x-2}$.

Решение задачи 4. Данное дифференциальное уравнение $y'' - 10y' + 25y = \frac{e^{5x}}{x^3}$ – это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами . Его общее решение имеет вид $y = y_0 + \tilde{y}$. Найдем его в 2 этапа .

1 этап. Построим общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения $y'' - 10y' + 25y = 0$. Составим для него характеристическое уравнение $k^2 - 10k + 25 = 0$ и найдем его корни: $k_1 = k_2 = 5$. По таблице 4 определим вид его общего решения $y_0 = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$.

2 этап. Построим частное решение $\tilde{y}$ данного неоднородного уравнения при помощи метода вариации произвольных постоянных. Здесь $y_0 = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x} = C_1 y_1 + C_2 y$, т.е. $y_1 = e^{5x}$, $y_2 = x e^{5x}$, тогда частное решение $\tilde{y}$ будем искать в виде $\tilde{y} = c_1(x) e^{5x} + c_2(x) x e^{5x}$.

Составим условия вариации :

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0, \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x)e^{5x} + c_2'(x)xe^{5x} = 0, \\ c_1'(x)5e^{5x} + c_2'(x)\left(e^{5x} + 5xe^{5x}\right) = \dfrac{e^{5x}}{x^3}. \end{cases}$$

Поделив оба уравнения почленно на $e^{5x} \neq 0$, получим систему с неизвестными $c_1'(x)$ и $c_2'(x)$:

$$\begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)x = 0, \\ c_1'(x)5 + c_2'(x)(1+5x) = \dfrac{1}{x^3}. \end{cases}$$

Для решения этой системы можно использовать метод исключения. Выразим $c_1'(x)$ из первого уравнения и подставим во второе:

$$c_1'(x) = -c_2'(x)x \Rightarrow -5c_2'(x)x + c_2'(x)(1+5x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow c_2'(x) = \frac{1}{x^3},$$

затем найдем $c_1'(x) = -c_2'(x)x = -\dfrac{1}{x^2}$.

Переходим к интегрированию:

$$c_1(x) = \int c_1'(x)dx = -\int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}, \quad c_2(x) = \int c_2'(x)dx = \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}$$

(константы интегрирования считаем равными нулю).

Тогда $\tilde{y} = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 = \dfrac{1}{x}e^{5x} - \dfrac{1}{2x^2}xe^{5x} = \dfrac{1}{2x}e^{5x}$, и общее решение

$$y = y_0 + \tilde{y} = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x} + \frac{1}{2x}e^{5x} = e^{5x}\left(C_1 + C_2x + \frac{1}{2x}\right).$$

Ответ: $y = e^{5x}\left(C_1 + C_2x + \dfrac{1}{2x}\right)$.

Решение задачи 5. Данное дифференциальное уравнение $y'' + 3y' - 4y = e^{-x}(\cos 3x + 8\sin 3x)$ – это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами (см. (38)). Его общее решение имеет вид $y = y_0 + \tilde{y}$. Найдем его в 2 этапа.

1 этап. Построим общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения $y'' + 3y' - 4y = 0$. Составим для него характеристическое уравнение $k^2 + 3k - 4 = 0$ и найдем его корни: $k_1 = -4, \quad k_2 = 1$. Определим вид его общего решения $y_0 = C_1e^{-4x} + C_2e^{x}$.

2 этап. Построим частное решение $\tilde{y}$ данного неоднородного уравнения при помощи метода неопределенных коэффициентов. В заданном уравнении

$f(x)=e^{-x}(\cos 3x+8\sin 3x)$ – правая часть 2-го специального вида: $f(x)=e^{\alpha x}\cdot(M\cos\beta x+N\sin\beta x)$, где $\alpha=-1,\ \beta=3,\ M=1,\ N=8$. Числа $\alpha\pm\beta i=-1\pm 3i\neq k_{1,2}$, тогда, частное решение $\tilde{y}$ будем искать в виде:

$$\tilde{y}=e^{-x}(A\cos 3x+B\sin 3x),$$

где A и B – неизвестные постоянные. Подставим $\tilde{y},\ \tilde{y}',\ \tilde{y}''$ в данное неоднородное уравнение:

$$\begin{array}{r|l} -4 & \tilde{y}=e^{-x}(A\cos 3x+B\sin 3x),\\ 3 & \tilde{y}'=-e^{-x}(A\cos 3x+B\sin 3x)+e^{-x}(-3A\sin 3x+3B\cos 3x),\\ 1 & \tilde{y}''=e^{-x}(A\cos 3x+B\sin 3x)-e^{-x}(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)-\\ & \quad -e^{-x}(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)+e^{-x}(-9A\cos 3x-9B\sin 3x),\\ \hline \multicolumn{2}{l}{-15e^{-x}(A\cos 3x+B\sin 3x)+e^{-x}(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)\equiv e^{-x}(\cos 3x+8\sin 3x).} \end{array}$$

Сократим обе части тождества на e^{-x} $(e^{-x}\neq 0)$ и приравняем коэффициенты при cos3x и при sin3x в левой и правой частях тождества.

$$\begin{array}{l|l} \text{При } \cos 3x & \begin{cases} -15A+3B=1,\\ -15B-3A=8. \end{cases} \\ \text{при } \sin 3x & \end{array}$$

Решая полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными, находим $A=-\dfrac{1}{6},\quad B=-\dfrac{1}{2}.$ Подставив найденные значения A и B в выражение $\tilde{y}$, получим частное решение неоднородного уравнения:

$$\tilde{y}=e^{-x}\left(-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{2}\sin 3x\right).$$

Объединяя результаты 2-х этапов, запишем ответ – общее решение данного уравнения.

Ответ: $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{x}+e^{-x}\left(-\dfrac{1}{6}\cos 3x-\dfrac{1}{2}\sin 3x\right).$

Решение задачи 6. Для решения системы $\begin{cases} y'=y+5z+x,\\ z'=-y-3z+1-x \end{cases}$ методом повышения порядка исключим из нее одну из функций – $z(x)$.

Выразим $z(x)$ из первого уравнения системы: $z=\dfrac{1}{5}(y'-y-x)$,

продифференцируем ее: $z'=\dfrac{1}{5}(y''-y'-1)$ и подставим z и z' во второе уравнение системы:

$$\frac{1}{5}(y''-y'-1)=-y-\frac{3}{5}(y'-y-x)+1-x\,.$$

После упрощения получаем дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно функции $y(x)$:

$$y''+2y'+2y=6-2x\,.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами . Его общее решение имеет вид $y=y_0+\tilde{y}$. Найдем его в 2 этапа.

1 этап. Построим общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения $y''+2y'+2y=0$. Составим для него характеристическое уравнение $k^2+2k+2=0$ и найдем корни: $k_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i$ – корни комплексные сопряженные: $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$. Здесь $\alpha=-1,\ \beta=1$, тогда по таблице 4 определим вид общего решения однородного уравнения:

$$y_0=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)\,.$$

2 этап. Построим частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения. Здесь $f(x)=6-2x$ – правая часть 1-го специального вида: $f(x)=e^{\alpha x}\cdot P_n(x)$, где $\alpha=0$, n = 1. Число $\alpha=0$ не совпадает с корнями характеристического уравнения $k_{1,2}=-1\pm i$, частное решение $\tilde{y}$ будем искать в виде:

$$\tilde{y}=e^{\alpha x}\cdot Q_1(x)=e^{0x}(Ax+B)=Ax+B\,,$$

где A, B – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Найдем производные $\tilde{y}',\ \tilde{y}''$ и подставим $\tilde{y},\ \tilde{y}',\ \tilde{y}''$ в неоднородное уравнение $y''+2y'+2y=6-2x$, при этом для простоты используем следующую форму записи:

$$\begin{array}{r|l} 2 & \tilde{y}=Ax+B \\ 2 & \quad\tilde{y}'=A \\ 1 & \quad\tilde{y}''=0 \end{array}$$

(здесь слева от черты записаны коэффициенты, с которыми $\tilde{y},\ \tilde{y}',\ \tilde{y}''$ входят в уравнение). Приравниваем левую и правую части уравнения после подстановки в него $\tilde{y},\ \tilde{y}',\ \tilde{y}''$:

$$2Ax+2B+2A\equiv 6-2x\,.$$

Приравнивая коэффициенты при x^1 и при x^0 в обеих частях тождества, получаем:

$$\begin{cases} 2A = -2, \\ 2B + 2A = 6, \end{cases}$$

откуда находим: A = –1, B = 4. Подставляя найденные значения в $\tilde{y}$, получим: $\tilde{y} = 4 - x$.

Объединяя результаты 2-х этапов, получаем общее решение уравнения $y'' + 2y' + 2y = 6 - 2x$:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 4 - x.$$

Найдем вторую неизвестную функцию:

$$z = \frac{1}{5}(y' - y - x) = \frac{1}{5}\left(-e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x) - 1\right) -$$

$$-\frac{1}{5}\left(e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 4 - x\right) - \frac{1}{5}x = \frac{1}{5}e^{-x}\left((C_2 - 2C_1)\cos x - (C_1 + 2C_2)\sin x\right) - 1.$$

Ответ:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 4 - x, \quad z = \frac{1}{5}e^{-x}\left((C_2 - 2C_1)\cos x - (C_1 + 2C_2)\sin x\right) - 1.$$